$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

（$1+8+27+64+\cdots$と、1 から順に 3 乗していった数の合計値を求める）

「4 乗」を利用する！

$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

k=1 のとき

$$2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$$

k=2 のとき

$$3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$$

k=3 のとき

$$4^4 - 3^4 = 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

k=nのとき

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

これらをすべて足していく。

左辺の合計は、

$$(2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + (4^4 - 3^4) + \cdots + \{n^4 - (n-1)^4\} + \{(n+1)^4 - n^4\}$$

$$= (\cancel{2^4} - 1^4) + (\cancel{3^4} - \cancel{2^4}) + (\cancel{4^4} - \cancel{3^4}) + \cdots + \{\cancel{n^4} - \cancel{(n-1)^4}\} + \{(n+1)^4 - \cancel{n^4}\}$$

$$= (n+1)^4 - 1^4$$

右辺の合計は、

$$(4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1) + (4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1) + \cdots + (4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$$

$$= 4 \times (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6 \times (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 4 \times (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$

$$= 4 \times \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \times \sum_{k=1}^{n} k + n$$

左辺と右辺は同じ物同士を足しているので、

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4 \times \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \times \sum_{k=1}^{n} k + n$$

「等差数列の和」

が成り立つ。これを計算していく。

「2 乗の和」の公式

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1^3 = 4 \times \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4 \times \sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4 \times \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + n$$

$$4 \times \sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n+1)^2$$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$