$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

（1 + 4 + 9 + 16 + ⋯ と、1 から順に 2 乗していった数の合計値を求める）

「3 乗」を利用する！

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

k=1 のとき

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

k=2 のとき

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

k=3 のとき

$$4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

k=nのとき

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$$

これらをすべて足していく。

左辺の合計は、

$$(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + \{n^3 - (n-1)^3\} + \{(n+1)^3 - n^3\}$$

$$= (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \cdots + \{\cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3}\} + \{(n+1)^3 - \cancel{n^3}\}$$

$$= (n+1)^3 - 1^3$$

右辺の合計は、

$$(3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1) + (3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1) + \cdots + (3 \times k^2 + 3 \times k + 1)$$

$$= 3 \times (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3 \times (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$

$$= 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \sum_{k=1}^{n} k + n$$

左辺と右辺は同じ物同士を足しているので、

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \sum_{k=1}^{n} k + n$$

が成り立つ。これを計算していく。

等差数列の和

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1^3 = 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{n^2+n}{2} + n$$

移項

$$3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - 3 \times \frac{n^2+n}{2} - n$$

$$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

↑因数分解

よって、

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$